



TÀI LIỆU THAM KHẢO

Dùng chung cho biên soạn đề thi, chuyên đề, lời giải và tài liệu học tập

CHUYÊN NGHIỆP • NHẤT QUÁN • DỄ TÁI SỬ DỤNG

Tên tài liệu	CHUYÊN ĐỀ 1 - TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ
Môn học / Khối lớp	TOÁN • KHỐI: 12
Chương/Chuyên đề	CHƯƠNG 1-ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KSHS
Mã tài liệu / Phiên bản	TL-TOAN-KHOI127963BB-CHUONG1UNGDU-TINH DONDIEUV-000076• Phiên bản 1.0
Ngày phát hành	15/03/2026
Người tài liệu	Sưu tầm

GIỚI THIỆU & TUYÊN BỐ SỬ DỤNG TÀI LIỆU

Tài liệu này được VietEduUp tổ chức sưu tầm, chọn lọc, tổng hợp và biên tập từ nhiều nguồn tham khảo phục vụ mục tiêu học tập, giảng dạy, ôn tập và phát triển cộng đồng giáo dục. Nội dung trong tài liệu được chuẩn hóa theo định hướng trình bày rõ ràng, thống nhất và thuận tiện cho giáo viên, học sinh cũng như người biên soạn.

Chúng tôi trân trọng cảm ơn Quý Thầy Cô, tác giả, cộng tác viên và các đơn vị đã đóng góp tri thức, kinh nghiệm chuyên môn và nguồn học liệu quý báu cho quá trình hình thành tài liệu. Mọi sự đóng góp của cộng đồng giáo dục là nền tảng quan trọng để nâng cao chất lượng nội dung và góp phần thúc đẩy sự phát triển bền vững của giáo dục nước nhà.

Tài liệu được sử dụng với mục đích giáo dục, tham khảo, biên soạn và đào tạo nội bộ. VietEduUp tôn trọng quyền tác giả, quyền liên quan và luôn khuyến khích việc ghi nhận nguồn, đối chiếu học liệu gốc và sử dụng nội dung một cách có trách nhiệm. Quyền sở hữu đối với các tài liệu, trích dẫn, ví dụ hoặc học liệu gốc – nếu có – vẫn thuộc về tác giả hoặc chủ sở hữu tương ứng.

Trong trường hợp phát hiện nội dung cần điều chỉnh về nguồn tham khảo, phạm vi sử dụng hoặc vấn đề bản quyền, VietEduUp sẵn sàng tiếp nhận phản hồi để rà soát, ghi bổ sung nguồn, điều chỉnh hoặc gỡ bỏ nội dung khi phù hợp. Việc sử dụng tài liệu này không nhằm thay thế, sao chép nguyên trạng hoặc thương mại hóa trái phép các xuất bản phẩm và học liệu thuộc quyền sở hữu của bên thứ ba.

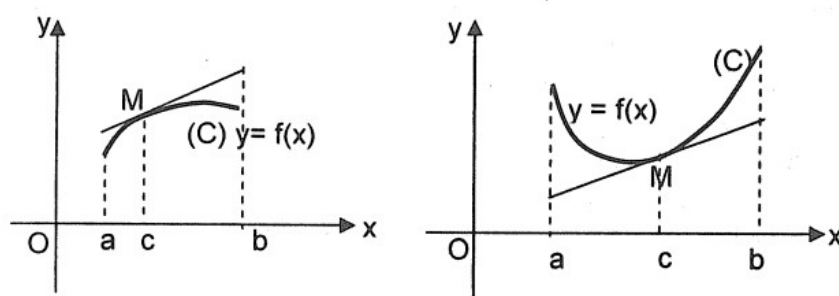
Khi tái sử dụng mẫu này, đơn vị biên soạn nên chủ động kiểm tra nguồn nội dung, phạm vi cho phép sử dụng và bổ sung ghi chú nguồn khi cần thiết. Cách làm này giúp tài liệu chuyên nghiệp hơn, minh bạch hơn và góp phần hạn chế rủi ro pháp lý trong quá trình khai thác học liệu.

Trân trọng!

1. Kiến thức trọng tâm

Định lý Lagrange: Cho f là một hàm liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm trên $(a; b)$. Lúc đó tồn tại $c \in (a; b)$ để:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{hay} \quad f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$



Định lý Rolle: Cho f là một hàm liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm trên $(a; b)$ và $f(a) = f(b)$. Lúc đó tồn tại $c \in (a; b)$ để $f'(c) = 0$.

Định lý Cauchy: Cho f và g là hai hàm liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm trên $(a; b)$ và $g'(x) \neq 0$ tại mỗi $x \in (a; b)$.

Lúc đó tồn tại $c \in (a; b)$ để
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Tính đơn điệu

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ khi đó:

- Nếu f đồng biến trên $(a; b)$ thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b)$.
- Nếu f nghịch biến trên $(a; b)$ thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$.
- Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của $(a; b)$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của $(a; b)$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.

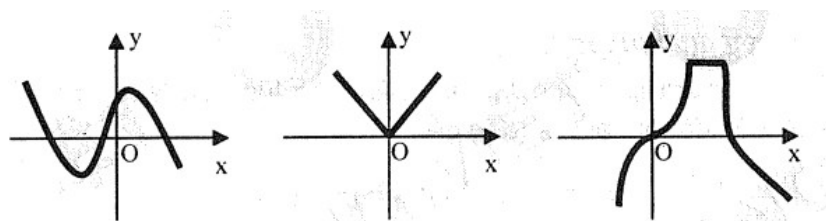
- Nếu f đồng biến trên khoảng $(a;b)$ và liên tục trên $[a;b]$ thì đồng biến trên $[a;b]$; và liên tục trên $(a;b]$ thì đồng biến trên $(a;b]$; liên tục trên $[a;b]$ thì đồng biến trên $[a;b]$.
- Nếu f nghịch biến trên $(a;b)$ và liên tục trên $[a;b]$ thì nghịch biến trên $[a;b]$; liên tục trên $(a;b]$ thì nghịch biến trên $(a;b]$; liên tục trên $[a;b]$ thì nghịch biến trên $[a;b]$.
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in D$ thì hàm số f không đổi trên D .

Cực trị của hàm số

Cho hàm số f xác định trên tập hợp D và $x_0 \in D$.

x_0 được gọi là một điểm cực đại của f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b) \subset D$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.

x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b) \subset D$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.



Bổ đề Fermat: Giả sử hàm số có đạo hàm trên $(a;b)$. Nếu f đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a;b)$ thì $f'(x_0) = 0$.

- Cho $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa x_0 có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$.

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì f đạt cực tiểu tại x_0

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm thì f đạt cực đại tại x_0

- Cho $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a;b)$ chứa x_0

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0

Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_0

Ứng dụng vào phương trình

- Nếu hàm số f đơn điệu trên K thì phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm. Nếu $f(a)=0$, a thuộc K thì $x=a$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$.
- Nếu f có đạo hàm cấp 2 không đổi dấu trên K thì f' là hàm đơn điệu nên phương trình $f(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm trên K . Nếu $f(a)=0$ và $f(b)=0$ với $a \neq b$ thì phương trình $f(x)=0$ chỉ có 2 nghiệm là $x=a$ và $x=b$.
- Nếu f là một hàm liên tục trên $[a;b]$, có đạo hàm trên $(a;b)$ thì phương trình
$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
 có ít nhất một nghiệm $c \in (a;b)$.
Đặc biệt, nếu $f(a)=f(b)=0$ thì phương trình $f'(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $c \in (a;b)$ hay giữa hai nghiệm của f thì có ít nhất một nghiệm của đạo hàm f' .

Chú ý:

- 1) Tung độ cực trị $y=f(x)$ tại $x=x_0$:

Hàm đa thức: $y=q(x).y'+r(x) \Rightarrow y_0=r(x_0)$

Hàm hữu tỉ: $y=f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y_0=\frac{u(x_0)}{v(x_0)}=\frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$

Đặc biệt: Với hàm $y=f(x)$ bậc 3 có CĐ, CT và nếu $y=q(x).y'+r(x)$ thì phương trình đường thẳng qua CĐ, CT là $y=r(x)$.

- 2) Số nghiệm của phương trình bậc 3: $ax^3+bx^2+cx+d=0, a \neq 0$.

Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x$ hay $f'(x) \leq 0, \forall x$ thì $f(x)=0$ chỉ có 1 nghiệm.

Nếu $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt và:

Với $y_{CĐ} \cdot y_{CT} > 0$: phương trình $f(x)=0$ chỉ có 1 nghiệm

Với $y_{CĐ} \cdot y_{CT} = 0$: phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm (1 đơn, 1 kép)

Với $y_{CĐ} \cdot y_{CT} < 0$: phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt

2. Các bài toán

Bài toán 1.1: Chứng minh các hàm số sau là hàm không đổi