



TÀI LIỆU THAM KHẢO

Dùng chung cho biên soạn đề thi, chuyên đề, lời giải và tài liệu học tập

CHUYÊN NGHIỆP • NHẤT QUÁN • DỄ TÁI SỬ DỤNG

Tên tài liệu	CHUYÊN ĐỀ 2 - KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ_HSG
Môn học / Khối lớp	TOÁN • KHỐI: 12
Chương/Chuyên đề	CHƯƠNG 1-ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KSHS
Mã tài liệu / Phiên bản	TL-TOAN-KHOI127963BB-CHUONG1UNGDU-KHAOSATVAVED-000077• Phiên bản 1.0
Ngày phát hành	15/03/2026
Người tài liệu	Sưu tầm

GIỚI THIỆU & TUYÊN BỐ SỬ DỤNG TÀI LIỆU

Tài liệu này được VietEduUp tổ chức sưu tầm, chọn lọc, tổng hợp và biên tập từ nhiều nguồn tham khảo phục vụ mục tiêu học tập, giảng dạy, ôn tập và phát triển cộng đồng giáo dục. Nội dung trong tài liệu được chuẩn hóa theo định hướng trình bày rõ ràng, thống nhất và thuận tiện cho giáo viên, học sinh cũng như người biên soạn.

Chúng tôi trân trọng cảm ơn Quý Thầy Cô, tác giả, cộng tác viên và các đơn vị đã đóng góp tri thức, kinh nghiệm chuyên môn và nguồn học liệu quý báu cho quá trình hình thành tài liệu. Mọi sự đóng góp của cộng đồng giáo dục là nền tảng quan trọng để nâng cao chất lượng nội dung và góp phần thúc đẩy sự phát triển bền vững của giáo dục nước nhà.

Tài liệu được sử dụng với mục đích giáo dục, tham khảo, biên soạn và đào tạo nội bộ. VietEduUp tôn trọng quyền tác giả, quyền liên quan và luôn khuyến khích việc ghi nhận nguồn, đối chiếu học liệu gốc và sử dụng nội dung một cách có trách nhiệm. Quyền sở hữu đối với các tài liệu, trích dẫn, ví dụ hoặc học liệu gốc – nếu có – vẫn thuộc về tác giả hoặc chủ sở hữu tương ứng.

Trong trường hợp phát hiện nội dung cần điều chỉnh về nguồn tham khảo, phạm vi sử dụng hoặc vấn đề bản quyền, VietEduUp sẵn sàng tiếp nhận phản hồi để rà soát, ghi bổ sung nguồn, điều chỉnh hoặc gỡ bỏ nội dung khi phù hợp. Việc sử dụng tài liệu này không nhằm thay thế, sao chép nguyên trạng hoặc thương mại hóa trái phép các xuất bản phẩm và học liệu thuộc quyền sở hữu của bên thứ ba.

Khi tái sử dụng mẫu này, đơn vị biên soạn nên chủ động kiểm tra nguồn nội dung, phạm vi cho phép sử dụng và bổ sung ghi chú nguồn khi cần thiết. Cách làm này giúp tài liệu chuyên nghiệp hơn, minh bạch hơn và góp phần hạn chế rủi ro pháp lý trong quá trình khai thác học liệu.

Trân trọng!

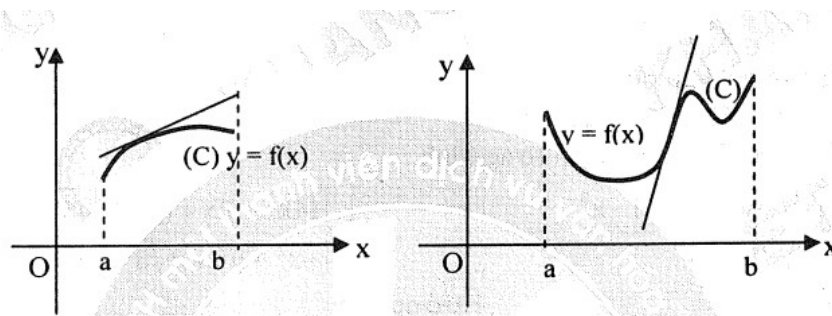
1. Kiến thức trọng tâm

Tính lồi lõm của đồ thị:

Hàm số f xác định trên K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

f gọi là lồi trên K nếu $\forall \alpha, \beta, \alpha + \beta = 1: f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y), \forall x, y \in K$

f gọi là lõm trên K nếu $\forall \alpha, \beta, \alpha + \beta = 1: f(\alpha x + \beta y) \geq \alpha f(x) + \beta f(y), \forall x, y \in K$



Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp 2 trên K

f lồi trên $K \Leftrightarrow f''(x) \geq 0, \forall x \in K$

f lõm trên $K \Leftrightarrow f''(x) \leq 0, \forall x \in K$

Điểm uốn của đồ thị:

Điểm $U(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm uốn của đường cong $(C): y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 sao cho một trong 2 khoảng $(a; x_0), (x_0; b)$ thì tiếp tuyến tại điểm U nằm phía trên đồ thị còn ở khoảng kia thì tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 . Nếu $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $U(x_0; f(x_0))$ là điểm uốn của đường cong $(C): y = f(x)$.

Chú ý:

1) Nếu $y = p(x).y'' + r(x)$ thì tung độ điểm uốn tại x_0 là $y_0 = r(x_0)$

2) Nếu f lõm trên đoạn $[a; b]$ thì GTLN $= \max\{f(a); f(b)\}$

3) Nếu f lồi trên đoạn $[a; b]$ thì GTNN $= \min\{f(a); f(b)\}$

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm đa thức: gồm 3 bước:

Bước 1: Tập xác định

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- Xét tính chẵn, lẻ nếu có.

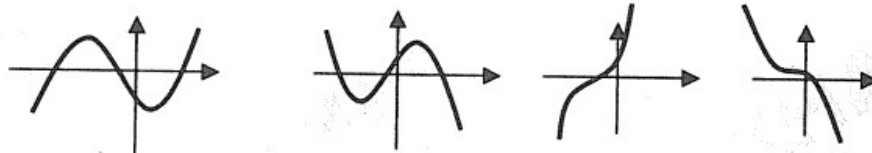
Bước 2: Sự biến thiên

- Tính các giới hạn
- Tính đạo hàm cấp một, xét dấu
- Lập bảng biến thiên rồi chỉ ra khoảng đồng biến, nghịch biến và cực đại, cực tiểu

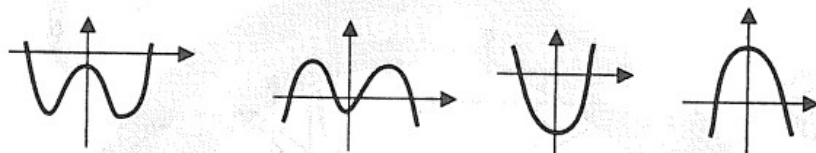
Bước 3: Vẽ đồ thị

- Tính đạo hàm cấp hai, xét dấu để chỉ ra điểm uốn của hàm đa thức
- Cho vài giá trị đặc biệt, giao điểm với hai trục tọa độ
- Vẽ đúng đồ thị

Bốn dạng đồ thị hàm bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ có tâm đối xứng là điểm uốn.



Bốn dạng đồ thị hàm trùng phương: $y = ax^4 + bx^2 + c, a \neq 0$



Đường tiệm cận

- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

- Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$

- Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$ được gọi là tiệm cận xiên của đồ thị $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Chú ý:

- 1) Nếu chia tách được $y = f(x) = ax + b + r(x)$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} r(x) = 0$ thì tiệm cận xiên: $y = ax + b$

$$x \rightarrow \pm\infty: \sqrt{x^2 + bx + c} \approx \left| x + \frac{b}{2} \right|$$

2) Biểu thức tiệm cận khi

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm hữu tỉ: gồm 3 bước:

Bước 1: Tập xác định

- Tìm tập xác định
- Xét tính chẵn, lẻ nếu có

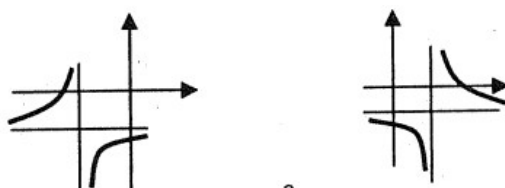
Bước 2: Chiều biến thiên

- Tính các giới hạn, tìm các tiệm cận
- Tính đạo hàm cấp một, xét dấu
- Lập bảng biến thiên rồi chỉ ra khoảng đồng biến, nghịch biến và cực đại, cực tiểu

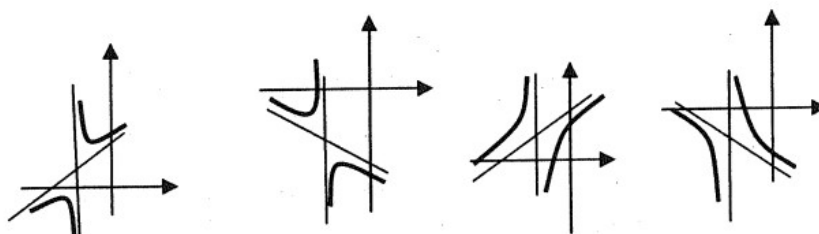
Bước 3: Vẽ đồ thị

- Cho vài giá trị đặc biệt, giao điểm với hai trục tọa độ
- Vẽ đúng đồ thị, lưu ý tâm đối xứng là giao điểm 2 tiệm cận

Hai dạng đồ thị hàm hữu tỉ bậc 1/1: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0, ad - bc \neq 0$



Bốn dạng đồ thị hàm hữu tỉ: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ ($a \neq 0, a' \neq 0$)



Chú ý:

1) Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra các đồ thị:

$y = -f(x)$ bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành

$y = f(-x)$ bằng cách lấy đối xứng qua trục tung

$y = -f(-x)$ bằng cách lấy đối xứng qua gốc